Лекція № 30

9.3.2. Електричне дипольне випромінювання

Доданок $\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}$ в формулах (9.10) можна відкинути тільки у випадку, коли за цей час розподіл зарядів зміниться в незначній мірі. Припустимо, що значна зміна розподілу зарядів відбувається за час T. В разі періодичного руху частота зміни буде по порядку величини $\omega \sim \frac{1}{T}$. Нехай лінійний розмір системи зарядів $\sim a$. Маємо таку оцінку:

$$\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c} \sim \frac{a}{c} \ll T; \quad a \ll cT = \lambda.$$

Лінійний розмір системи зарядів повинен бути набагато менше, ніж довжина хвиль випромінювання

$$a \ll \lambda \tag{9.11}$$

Умову (9.11) можна записати інакше:

$$T \sim \frac{a}{\upsilon}.$$

Тут υ – середня швидкість руху зарядів. Тепер

$$\frac{a}{c} \ll T \sim \frac{a}{\upsilon};$$

$$\upsilon \ll c. \tag{9.12}$$

Знехтувати доданком $\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}$ можна для нерелятивістських зарядів.

Отриманні наближені формули (9.10) описують поле випромінювання – розбіжні сферичні хвилі.

$$\varphi \approx \frac{1}{r}\iiint_V \rho\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)dV'; \quad \vec{A} = \frac{1}{rc}\iiint_V \vec{j}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)dV'.$$

Для подальшого спрощення формул (9.10) домовимось, що відстань, на якій вивчається поле набагато більша, ніж довжина хвиль, що випромінюються. Це так звана **хвилева зона**

$$a \ll \lambda \ll r \tag{9.13}$$

У хвилевій зоні для невеликих областей простору електромагнітну хвилю, що розповсюджується із початку координат можна вважати практично пласкою (це сферична хвиля великого радіусу). При виконанні умов (9.13) можна застосувати формули зв'язку між напруженостями для саме пласких хвиль. Пласка хвиля визначається векторним потенціалом. Магнітне поле визначається через векторний потенціал. Зручно шукати саме напруженість магнітного поля

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Напруженість електричного поля пласкої хвилі знайдемо потім так:

$$\vec{E} = \left[\vec{H}, \vec{n}\right].$$

Повністю відкидаємо малий доданок $\dfrac{\vec{n}\vec{r}'}{c}$

$$\vec{A} \approx \frac{1}{rc}\iiint\limits_V \vec{j}\left(t - \frac{r}{c} + \cancel{\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}}\right)dV' =$$

$$= \frac{1}{rc}\iiint\limits_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)dV'.$$

Тепер інтеграл береться для всіх точок системи зарядів в один й той же момент часу.

Перейдемо від суцільного розподілу густини та струмів до точкових зарядів:

$$\vec{A} = \frac{1}{rc}\iiint\limits_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)dV';$$

$$\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) = \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)\vec{\upsilon} = \sum_a e_a \vec{\upsilon}_a \delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_a\right);$$

$$\vec{A} = \frac{1}{rc}\iiint\limits_V \sum_a e_a \vec{\upsilon}_a \delta\left(\vec{r}' - \vec{r}_a\right)dV' = \frac{1}{rc}\sum_a e_a \vec{\upsilon}_a\left(t - \frac{r}{c}\right);$$

Векторний потенціал у хвилевій зоні визначається через похідну по часу від електричного дипольного моменту системи зарядів:

$$\vec{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \sum_a e_a \vec{r}_a\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

$$\dot{\vec{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \sum_a e_a \vec{\upsilon}_a\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Отримали векторний потенціал поля випромінювання у дипольному наближенні

$$\vec{A}=\frac{\dot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr}. \tag{9.14}$$

Шукаємо напруженість магнітного поля

$$\vec{H}=\mathrm{rot}\vec{A}=\left[\nabla,\vec{A}\right]=$$
$$=\frac{1}{c}\left[\nabla,\frac{1}{r}\dot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]=\frac{1}{c}\left(\left[\nabla\frac{1}{r},\dot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{1}{r}\left[\nabla,\dot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right)=$$
$$=\frac{1}{c}\left(\left[-\frac{\vec{r}}{r^3},\dot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{1}{cr}\left[\nabla r,\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right).$$

Оцінимо згасання зі збільшенням відстані від системи зарядів отриманих двох доданків та залишимо тільки той, що згасає повільніше, як $1/r$:

$$\vec{H}\approx\frac{1}{c}\left(\underbrace{\cancel{\left[-\frac{\vec{r}}{r^3},\dot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}}_{\sim\frac{1}{r^2}}-\underbrace{\frac{1}{cr}\left[\nabla r,\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}_{\sim\frac{1}{r}}\right)=$$
$$-\frac{1}{c^2r}\left[\frac{\vec{r}}{r},\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]=\frac{1}{c^2r}\left[\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right),\underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\vec{n}}\right]=\frac{1}{c^2r}\left[\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right),\vec{n}\right].$$

Отримали формулу для напруженості магнітного поля при дипольному випромінюванні

$$\vec{H}=\frac{1}{c^2r}\left[\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right),\vec{n}\right]. \tag{9.15}$$

Напруженість електричного поля при дипольному випромінюванні

$$\vec{E}=\left[\vec{H},\vec{n}\right]=\frac{1}{c^2r}\left[\left[\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{r}{c}\right),\vec{n}\right],\vec{n}\right]. \tag{9.16}$$

В формули для напруженості входить друга похідна від дипольного моменту. Це означає, що **випромінювати електромагнітні хвилі можуть тільки заряди, які рухаються прискорено**. Заряд, який рухається рівномірно, електромагнітні хвилі не випромінює.

В дипольному наближенні повністю знехтували розмірами системи. Для всіх зарядів системи запізнювання береться однаковим $t-\frac{r}{c}$, тобто вважаємо, що всі заряди як би знаходяться у початку координат – повністю нехтуємо розмірами системи зарядів.

9.3.3. Інтенсивність дипольного випромінювання

Хвилі, які випромінює система зарядів, уносять із собою певну енергію. Потік енергії визначається вектором Пойнтінга, який для пласких хвиль можна представити так:

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \frac{c}{4\pi}H^2\vec{n} = \frac{c}{4\pi}E^2\vec{n}.$$

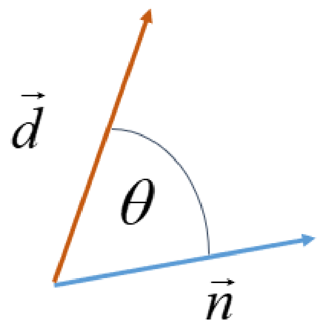
Шукаємо інтенсивність випромінювання dI в тілесний кут $d\Omega$ – це кількість енергії, що проходить за одиницю часу через елемент сферичної поверхні із центром у початку координат та радіусом r^2

$$dS = r^2 d\Omega.$$

$$dI = \frac{c}{4\pi}H^2 r^2 d\Omega.$$

Інтенсивність не залежить від r, бо $H \sim \frac{1}{r}$.

Розрахуємо кутовий розподіл дипольного випромінювання. Введемо кут між напрямком дипольного моменту системи зарядів та напрямком спостереження $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ (див. рис.)



$$dI = \frac{c}{4\pi}H^2 r^2 d\Omega; \quad \vec{H} = \frac{1}{c^2 r}\left[\ddot{\vec{d}},\vec{n}\right]; \quad |\vec{H}| = \frac{1}{c^2 r}\ddot{d}\sin\theta;$$

$$dI = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2 r}\ddot{d}\sin\theta\right)^2 r^2 d\Omega = \frac{\cancel{c}}{4\pi}\frac{1}{c^{\cancel{4}3}\cancel{r^2}}\ddot{d}^2\sin^2\theta\,\cancel{r^2}\,d\Omega;$$

Кутовий розподіл інтенсивності випромінювання

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{d}^2 \sin^2\theta d\Omega. \tag{9.17}$$

Підрахуємо повну інтенсивність випромінювання по всіх напрямках. Повне випромінювання по всіх кутах шукаємо, як інтеграл по одиничній сфері. Елемент тілесного кута в сферичних координатах

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \left(\frac{1}{4\pi c^3}\ddot{d}^2 \sin^2\theta \right) = \frac{\ddot{d}^2}{(4\pi)c^3}(2\pi)\int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= -\frac{\ddot{d}^2}{2c^3}\int_0^{\pi} \sin^2\theta d\left(\cos\theta\right) = -\frac{\ddot{d}^2}{2c^3}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right) d\left(\cos\theta\right) =$$

$$= -\frac{\ddot{d}^2}{2c^3}\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \cancel{2}\,\frac{\ddot{d}^2}{\cancel{2}\pi c^3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}.$$

Повна інтенсивність дипольного випромінювання

$$I = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}. \tag{9.18}$$

Розглянемо один заряд, який рухається у зовнішньому полі та має дипольний момент

$$\vec{d} = e\vec{r}.$$

Друга похідна від дипольного моменту одного точкового заряду визначається через його прискорення $\vec{a}$

$$\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = e\vec{a}.$$

Інтенсивність дипольного випромінювання нерелятивістського заряду, який рухається прискорено визначається формулою

$$I = \frac{2e^2a^2}{3c^3}. \tag{9.19}$$

Покажемо, що для замкненої системи зарядів з однаковим відношенням заряду до маси

$$\frac{e_a}{m_a} = \frac{e}{m} = const$$

дипольне випромінювання відсутнє. Дипольний момент такої системи

$$\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a \left(\frac{m_a}{m_a} \right) = \sum_a \left(\frac{e_a}{m_a} \right) (m_a \vec{r}_a) = \frac{e}{m} \sum_a m_a \vec{r}_a$$

можна виразити через радіус-вектор центру мас. Для нерелятивістських зарядів

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}; \quad \sum_a m_a \vec{r}_a = \left(\sum_a m_a \right) \vec{R}_c;$$

$$\vec{d} = \frac{e}{m} \sum_a m_a \vec{r}_a = \frac{e}{m} \left(\sum_a m_a \right) \vec{R}_c.$$

Центр мас замкненої системи рухається зі сталою швидкістю:

$$\dot{\vec{R}}_c = \vec{V}_c = const.$$

Друга похідна від дипольного моменту такої системи дорівнює нулю:

$$\dot{\vec{d}} = \frac{e}{m} \left(\sum_a m_a \right) \dot{\vec{R}}_c = \frac{e}{m} \left(\sum_a m_a \right) \vec{V}_c = const;$$

$$\ddot{\vec{d}} = 0.$$

Наведемо без виводу формули для електричного квадрупольного та магнітного дипольного випромінювання. Наступні члени розкладу по малому параметру $\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}$

$$\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c} \right) \approx \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \left. \frac{\partial \vec{j}}{\partial \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c} \right)} \right|_{\vec{r}'=0} \left(\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c} \right)$$

слід враховувати, якщо або $\vec{d} = 0$ або $\ddot{\vec{d}} = 0$.

Векторний потенціал (електричне квадрупольне + магнітне дипольне) наближення

$$\vec{A} = \frac{[\dot{\vec{m}}, \vec{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\vec{Q}}}{6c^2 r} + \frac{\vec{n}}{6c^2 r} \iiint \ddot{\rho}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) r'^2 dV'. \qquad (9.20)$$

Тут $Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n_\beta$ – вектор, пов'язаний із квадрупольним електричним моментом

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_a e_a \left(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2 \right);$$

$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a e_a[\vec{r}_a, \vec{v}_a]$ – магнітний дипольний момент.

Напруженості (електричне дипольне + електричне квадрупольне + магнітне дипольне) випромінювання

$$\begin{gathered} \vec{H} = \frac{1}{c^2 r}\left([\ddot{\vec{d}}, \vec{n}] + \frac{1}{6c}[\dddot{\vec{Q}}, \vec{n}] + \Big[[\ddot{\vec{m}}, \vec{n}], \vec{n} \Big] \right); \\ \vec{E} = \frac{1}{c^2 r}\left(\Big[[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}], \vec{n} \Big] + \frac{1}{6c}\Big[[\dddot{\vec{Q}}, \vec{n}], \vec{n} \Big] + [\vec{n}, \ddot{\vec{m}}] \right). \end{gathered} \tag{9.21}$$